

ויקח יעקב אבן

שפופרת

במשנה במסכת עירובין אנחנו קוראים סיפור מעניין על רבן גמליאל דיבנה, רבי אלעזר בן עזריה, רבי יהושע, ורבי עקיבא:

פעם אחת לא נכנסו לנמל עד שחשיכה. אמרו לו לרבן גמליאל מה אנו לירד? אמר להן מותרים אתם, שכבר הייתי מסתכל והיינו בתוך התחום עד שלא חשיכה (נ"א עד שלא חשכה). משנה מסכת עירובין פרק ד' משנה ב'

ארבעת החכמים הפליגו בים והגיעו לחוף בערב שבת קרוב לחשיכה. לפי ההלכה אם בכניסת השבת היתה הספינה קרובה מאלפיים אמה מהחוף (בתוך "תחום השבת"), אז החכמים "קנו שביתה" ומותר היה להם לרדת לחוף ולהסתובב בעיר. ואילו היתה הספינה רחוקה מאלפיים אמה, עליהם להישאר בספינה עד לצאת השבת. שלושת החכמים שאלו את רבן גמליאל אם הספינה היתה בתוך תחום השבת, והוא עונה בחיוב.

אבל איך ידע רבן גמליאל את מרחק הספינה לחוף? גם בבבלי וגם בירושלמי יש הסברים.

בתלמוד הבבלי אנחנו מוצאים שלרבן גמליאל היה יתרון על החכמים האחרים בגלל מכשיר פלאי שהיה ברשותו:

תנא - שפופרת היתה לו לרבן גמליאל שהיה מביט וצופה בה אלפים אמה ביבשה וכנגדה אלפים בים. הרוצה לידע כמה עומקו של גיא מביא שפופרת ומביט בה וידע כמה עומקו של גיא. בבלי עירובין מג:

ואגב הסבר זה, התלמוד הבבלי ממשיך ומסביר עוד דרכים למדוד מרחקים: והרוצה לידע כמה גובהו של דקל מודד קומתו וצלו וצל קומתו וידע כמה גובה של דקל. בבלי עירובין מג:

לעומת הסבר זה, בתלמוד הירושלמי היתרון של רבן גמליאל נובע מנכסיו בחוף:

מצודות היו לו לרבן גמליאל שהיה משער בה עיניו במישר.
ירושלמי עירובין דף כח. פרק ד' הלכה ב'

ואולם, לחלק מהראשונים הספרדיים נוסח שונה בירושלמי המקרב את הסבר הירושלמי ללבלי. נוסח זה גורס במקום "מצודות" - "מצופית" או "מצופות", כלומר מכשיר שצופים בו. לדוגמא, ר' יהודה בן ברזילי מברצלונה, בספרו "ספר העתים", כותב:

פעם אחת לא נכנסו לנמל עד שחשיכה. אמרו לו לרבן גמליאל מה אנו לירד? אמר להן מותרים אתם, שכבר הייתי מסתכל והיינו בתוך התחום. תנא **שופפרת** היתה לו לרבן גמליאל שהיה מבטיט וצופה בה אלפים אמה ביבשה וכנגדה אלפים ביים. פירוש, כעין שופפרת עשויה מנחושת היתה לו לרבן גמליאל, ושיער בו אלפיים אמה ביבשה והיתה אצלו לשער בה ביים. ומפורש כך בירושלמי - **מצופית** היתה לו לגבן גמליאל והיה משער בה עיניו למישור אלפיים אמה והיה משער בה ביים. ספר העתים לר' יהודה בן ברזילי סימן ל"ו

וכך אצל אחרים מן הראשונים כגון רבינו חננאל, וכן אצל הראבי"ה (רבי אליעזר בן יואל). וראה הפניות בספר "הירושלמי כפשוטו" של הרב שאול ליברמן.

אם הנוסח "מצודות" הינו העיקר, יש שאלה בקשר למשמעותה. ייתכן ומדובר בבניינים מבוצרים, וייתכן ומדובר במלכודות דגים! כך או כך, על פי נוסח זה מסתבר שלרבן גמליאל היה ידוע מידת גובה או מרחק על החוף, והוא נעזר בכך בדרך כלשהי.

דרך זאת עשויה לדרוש ידע מתמטי מתקדם. ידוע לנו שרבן גמליאל הכיר את שיטות המתמטיקה היוונית. בנו, רבן שמעון בן גמליאל אומר על הבית בו גדל:

אלף ילדים היו בבית אבא, חמש מאות למדו תורה וחמש מאות למדו חכמת יוונית סוטה מט:; בבא קמא פג.

בהמשך ננסה להסביר בצורה מתמטית את פעולת השפופרת של רבן גמליאל.

שופר ושפופרת

עם נאחד את הידיעות מהמשנה ומהתלמודים נוכל להבין שעם כניסת השבת יכול היה רבן גמליאל לדעת שהספינה היתה בתוך תחום אלפיים האמה, מתוך הסתכלות ב"שפופרת" שלו ומתוך שהוא נעזר בידע שהיה לו בנוגע לעצמים בחוף. לחכמים האחרים היה חסר מכשיר כזה ו/או הידע הנדרש כדי להעריך את המרחק הקובע.

בימינו היינו משתמשים במד-טווח לייזר, דרכו מביטים בעצם ומוצג המרחק אליו. האם אפשר לומר עוד על טיבו של המכשיר שהיה ברשות רבן גמליאל?

רש"י מפרש :

שפופרת - קנה חלול. רש"י מסכת עירובין דף מג עמוד ב

וראינו שספר העתים מסביר שהינו קנה של נחשת דווקא.

כשלב ראשון חיוני לחקור את משמעות המילה שפופרת. בספר העתים (וכן גם במקורות אחרים) מכונה המכשיר **שופרפת** במקום **שפופרת**, המביא אותנו לקשור את המילה עם **שופר**. שופר שתוקעים בו הינו באמת קנה חלול, וייתכן ושופרפת משמעו שופר מלאכותי כפי שגרוגרת הינה גרגר מיובשת.

שפופרת של ביצה (במשנה שבת פרק ב' משנה ד') גם היא חלולה, אבל אינה בצורת קנה.

במשנה במסכת פרה (פרק ה' משנה ח') מופיע הביטוי **שפופרת הנוד** שהמפרשים מסבירים כקנה על פי נאד כדי לרוקן מתוכו נזל.

בסה"כ אפשר ללמוד מניתוח המילה רק שמדובר במשהו חלול, ולא יותר.

הרמב"ם והאסטרולאב

הרמב"ם חי בארצות מוסלמיות בתקופה שהם תרגמו והפיצו את הפילוסופיה והמתמטיקה היוונית, ובעצמו היה בקיא בשני אלה. הוא מבין שהיה לרבן גמליאל היה כלי שעושים המהנדסים (הכוונה לידענים בתחום הגיאומטריה), וייתכן שהיה לו מכשיר הנקרא אסטרולאב.

בפירושו למשנה אומר הרמב"ם כן:

פעם אחת לא נכנסו לנמל עד שחשיכה – קורין נמל למקום שהספינות נסתרות שם מן הרוח ויוצאות משם ליבשה. ואמר "הייתי מסתכלי", כלומר על ידי כלי, לפי שאפשר לדעת איזה מקום שתרצה ממה שתשיגהו ראיית העין באמצעות כלי שעושים המהנדסים, ואפשר להשיג את זה גם במחוגת האסטרוולאב ואיני רואה שכדאי להעריך ולבאר איך רואים את זה מפני שיארך הדבור וימשך ולא ישיג ממנו תועלת אלא מי שיודע הנדסה ומי שיודע יחסי המשולשים הדומים, והאיך אפשר להשיג ידיעת הצלע הבלתי ידוע אם ידועים לנו צלעות אחרות ידועות. ומי שלמד הנדסה עד כדי הבנת עניין זה ימצא שעניין זה קל אין צריך להאריך בו. פירוש הרמב"ם למשנה עירובין

אסטרוולאב הינו מכשיר ששימש את היוונים למדידת זוויות, במיוחד זוויות הגבהה של כוכבים מעל לאופק כדי לקבוע את קו הרוחב בו נמצא הצופה. משמעות המילה ביוונית "לוקח הכוכבים". המצאת האסטרוולאב מיוחסת להיפרכוס שחי כמה מאות שנה לפני רבן גמליאל. משערים שהאסטרונום המצרי המפורסם פתולמיאוס, שחייו חפפו את חיי רבן גמליאל, השתמש באסטרוולאב כדי להכין את טבלאותיו המפורסמות של מיקום הכוכבים. לכן, הימצאות מכשיר זה אצל רבן גמליאל אינו בלתי אפשרי, אם כי שימוש נרחב באסטרוולאב התחיל עם פירסום ספר אודותיו על ידי תיאון מאלכסנדריה כמאתיים שנה לאחר מותו של רבן גמליאל. אבל אסטרוולאב לבד אינו מספק דרך למדוד מרחק ללא ידיעת מרחק ייחוס. כמו כן, כדי לדייק במדידת מרחקים, יש צורך בדיוק רב במדידת הזווית.

כדי לראות כמה מדויקות צריכות להיות מדידות הזווית, נניח שרבן גמליאל הכיר מרחק בחוף השווה למאה אמה. במרחק אלפיים אמה מרחק זה פורש זווית של 2.86° . אבל האסטרוולאב לא מדייק עד כדי אחוזי מעלה! אם רבן גמליאל היה מודד שתי מעלות, הוא היה מסיק שהמרחק לחוף הינו 2864 אמה בקירוב, ואילו היה רואה שלוש מעלות היה מסיק שהמרחק הינו 1909 אמות בקירוב. ההפרש בין שתי המדידות האפשריות הינו 955 אמות, קרוב לחצי תחום שבת! ככל שהמרחק שמכיר רבן גמליאל גדול יותר, כך השגיאה קטנה יותר. אם המרחק הידוע הינו 200 אמות (זווית של 5.72°), השגיאה יורדת ל 382 אמות בקירוב. למרחק ידוע של 500 אמות (זווית של 14.25°) השגיאה הינה רק 137 אמות. קשה להאמין שרבן גמליאל היה סומך על מדידת זוויות בתנאים אלה.

בנוסף לשני מכשירי מדידה אפשריים (הראשון כלי שעושים המהנדסים והשני מחוגת האסטרוולאב), מזכיר הרמב"ם גם שני חישובים שונים. אחד יחסי המשולשים הדומים, כלומר המשפט שהצלעות המתאימות במשולשים דומים עומדים ביחס קבוע; והשני והאיך אפשר להשיג ידיעת הצלע הבלתי ידועה אם ידועים לנו צלעות אחרות ידועות, כלומר כל שיטה גיאומטרית או אלגברית לחלץ אורך צלע מתוך צלעות אחרות ידועות (כולל שימוש במשפט המשולשים הדומים). מסתבר שיש חפיפה חלקית בין שני האיזכורים. נראה בהמשך שהכלי שעושים המהנדסים עשוי לשמש לקביעת מרחק ע"י משולשים דומים, ואילו בעזרת האסטרוולאב ניתן לחשב צלע בלתי ידועה מתוך צלע ידועה ומדידת זווית (אם כי לא באופן ישיר מתוך ידיעת שתי הצלעות האחרות).

רש"י והטלסקופ

רש"י, בהמשך פירושו שכבר ציטטנו לעיל, אינו מזכיר אסטרוולאב, אלא מתאר את פעולת השפופרת :

שפופרת - קנה חלול, וכשהוא ארוך אין צופין בו למרחוק,
וכשהוא קצר צופין בו יותר, והיתה שפופרת של רבן גמליאל
מתוקנת למדת צפיית אלפים או בים או ביבשה. רש"י מסכת
עירובין דף מג:

תיאור זה של רש"י נראה, במבט ראשון, כתיאור כיוון מיקודו של טלסקופ, אבל הטלסקופ האופטי הומצא ע"י גליליאו ואחרים כחמש מאות שנה לאחר ימיו של רש"י.

רש"י ממשיך בתיאורו ומסביר שימוש נוסף לשפופרת, שימוש שאינו מוזכר בתלמוד, והוא מדידת עומקו של גיא.

כמה עומקו של גיא מביא שפופרת ומביט בה וימדוד כמה אמות הוא יכול לצפות בה, ואחר כך ילך על שפת הגיא ויצפה בה לעומקו, ויתרחק לאחוריו עד שיבחין שבמקום שכלה עומקו של גיא שם כלה צפיית השפופרת, אם יתרחק עוד מעט לא יראה את קרקעית הגיא, וידע שעומקו של גיא והרחקתו שנתרחק משפתו הוי כמידת צפיית השפופרת.

הסברו של רש"י הינו מפורט, אבל אינו ברור כל צורכו. בניגוד לרבן גמליאל ולרמב"ם, רש"י חי בצפון אירופה בתקופה שמכנים ההיסטוריונים "התקופה החשוכה" בגלל השתכחות הפילוסופיה והמתמטיקה היווניות. לכן ידיעותיו המתמטיות של רש"י מוגבלות לידיעות המועברות במקורות התלמודיים, דבר המקשה עליו לעתים. לדוגמה, כתוב במסכת עירובין בעניין סולם באורך ארבעה עשר טפחים המונח על כותל בגובה עשרה טפחים:

אמר רב יהודה אמר שמואל - כותל עשרה צריך סולם ארבעה עשר להתירו. תלמוד בבלי, מסכת עירובין ע"ח.

ואומר שם רש"י :

סולם ארבעה עשר. שצריך למשוך רגלי הסולם ארבעה מן הכותל לפי שאין סולם זקוף נוח לעלות. רש"י עירובין ע"ח.

רש"י סובר שמרחק בסיס הסולם מהכותל יהיה ארבעה טפחים, כלומר שאורך היתר הינו סכום אורכי צלעות המשולש במקום שורש סכום הריבועים. בעלי התוספות הבחינו בבעיה מתוך כלל המופיע בתלמוד שיתר משולש שווה שוקיים ישר זווית גדול מהצלעות בשתי חמישיות (כלומר, שורש שתיים הינו בערך 1.4) ומתקנים שבסיס הסולם במקרה שלפנינו צריך להיות מרוחק מהכותל עשרה טפחים:

פירש בקונטרס שצריך למשוך רגלי הסולם ארבעה מן הכותל, ולא דק! דכי משיך ליה עשרה טפחים נמי מן הכותל, שהוא שיעור גובה הכותל, יגיע ראש הסולם לראש הכותל, דארבעה עשר הוא שיעור אלכסון של עשרה על עשרה. דכל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא. וכן פירש רבינו חננאל. תוספות עירובין ע"ח.

בהמשך נראה שרש"י מסביר בפרוטרוט את שיטות השימוש בשפופרת אין ייתכן שדווקא רש"י, שלא נהנה מפירותיו של המתמטיקה היוונית, יכול היה להסביר לפרטיו סוגיה מתמטית זאת? אם נמשיך לקרוא ברש"י במסכת עירובין נראה את הפסקה הבאה:

אמר רב סולם זקוף ממעט גמרא. שמעתי מרבתי וטעמא לא ידענא, דהא אין נוח לעלות. רש"י עירובין ע"ח.

כלומר, גם כאשר רש"י בעצמו אינו מבין בעצמו את ההצדקה, הוא מביא לנו מסורת רבותיו בעניין. סביר שגם בעניין מדידת עומק גיא עם שפופרת מוסר רש"י בדייקנות שיטה ששמע מרבתי.

לסיכום, רש"י מסביר שניתן לבצע שני סוגים של מדידות בעזרת השפופרת. מדידה מהסוג הראשון משמש למציאת מרחק מהצופה עד לדבר שצופים בו. במדידה זאת אורך השפופרת חשוב (והשפופרת של רבן גמליאל היתה מכוונת למדידת אלפיים אמה) ומספיק לצפות בשפופרת פעם אחת. מדידה מהסוג השני משמש למציאת עומקו של גיא. במדידה זאת לא מצויין שאורך השפופרת חשוב, אבל יש לבצע סדרה של תצפיות כדי להשלים את המדידה.

פתרון תעלומת השפופרת

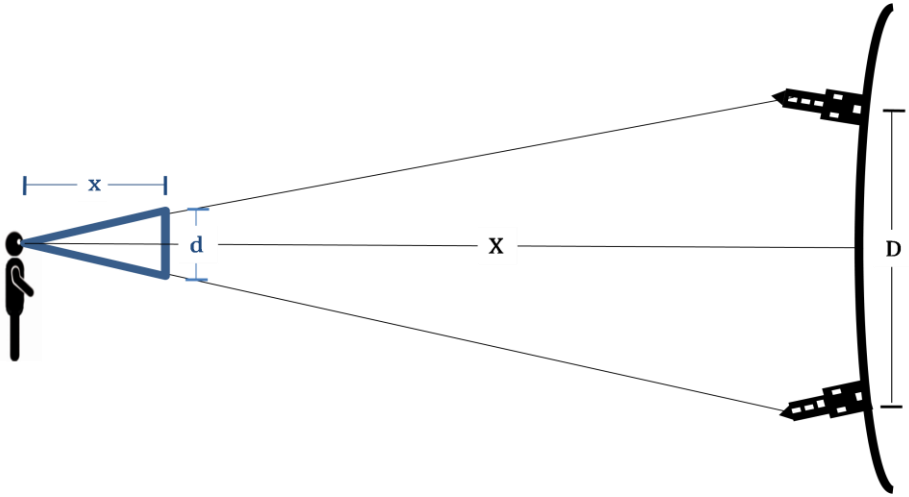
טענתי ששני סוגי המדידה שמוסר רש"י מתאימים לשתי שיטות החישוב של הרמב"ם, ומשלימים אותן. כדי לבצע מדידה מהסוג הראשון (הסתכלות דרך שפופרת בעלת אורך משתנה) צריכים להיעזר בדמיון המשולשים של הרמב"ם, וכדי לבצע את הסוג השני (מדידת עומק גיא בכמה שלבים) עלינו לבצע חישוב מורכב יותר של צלע לא ידוע במשולש. אמנם, בניגוד לרמב"ם אצל רש"י קיים רק כלי מדידה אחד, אבל כלי זה הינו דו-שימושי וממלא את מקומם של שני כלים. פעם משתמשים באופן מהותי באורכו של השפופרת (ולכן יש לכוונו מראש), ופעם רק משתמשים בו לצפות בכיוון הרצוי. לכן, אין גם בעניין זה שוני מהותי בין רש"י לבין הרמב"ם.

נבהיר עכשיו את שני סוגי השימוש בשפופרת.

מדידת מרחק עם ידע מוקדם ושפופרת מתכוונת

נתחיל עם השיטה הראשונה של רש"י, השיטה ששימשה את רבן גמליאל למציאת מרחק הספינה מהחוף במשנתנו. כאמור השיטה מסתמכת על ידיעה של מרחק אחר (במשנה במרחק בין המצודות בחוף), דורשת שפופרת בעלת אורך שניתן לכיול (ע"פ רש"י השפופרת של רבן גמליאל היתה מכוויילת למדידה של אלפיים אמה), ונעזר (על פי הרמב"ם) במשפט שגדלים מתאימים במשולשים דומים עומדים ביחס קבוע.

נקרא למרחק בין שתי המצודות D ולמרחק הרצוי עד לחוף (כלומר אלפיים אמה) X. כמו כן נקרא לקוטר השפופרת d ולאורכו x. הסימונים מובהרים באיור הבא.



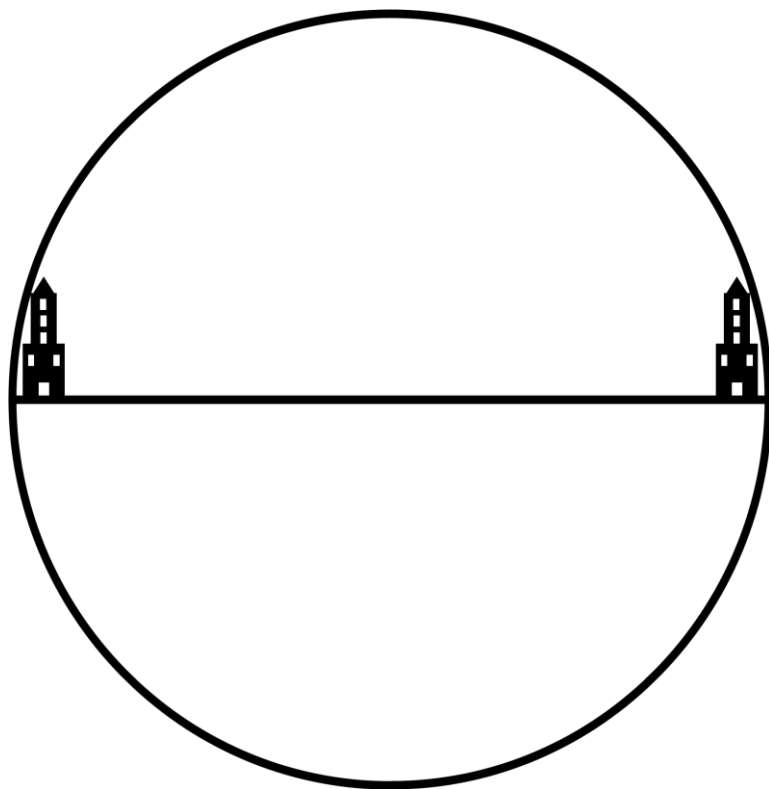
בהנחה שקו הצפייה ניצב לחוף, יש כאן שני משולשים דומים, אחד בעל בסיס d וגובה x והשני בעל בסיס D וגובה X . ולכן, לפי משפט המשולשים הדומים מתקיים:

$$\frac{x}{d} = \frac{X}{D}$$

רבן גמליאל ידע את המרחק בין המצודות D ורצה לדעת מתי המרחק מהחוף X הינו אלפיים אמה. הוא חישב את היחס בין אלפיים אמה לבין המרחק הידוע וכיוון את אורך השפופרת x להיות באותו יחס לקוטר השפופרת. לדוגמא, אם המרחק בין המצודות D הינו 200 אמות, אזי היחס בינו לבין תחום שבת הינו עשירית; ולכן אם קוטר השפופרת d הינו חצי טפח, אורכו x חייב להיות מכוון להיות חמישה טפחים. זהו הסבר לדברי רש"י והיתה שפופרת של רבן גמליאל מתוקנת למדת צפיית אלפים.

ואולם, קשים דברי רש"י ששפופרת קצרה יותר מתאימה למרחק גדול וכשהוא ארוך אין צופין בו למרחוק, וכשהוא קצר צופין בו יותר בניגוד למה שמתקבל מדמיון משולשים. אבל ייתכן שהכוונה לא D ולא ל X כאן. כלומר, בשפופרת ארוכה אפשר לראות רק מצודות הקרובות אחת לשנייה ואילו בשפופרת קצרה אפשר לראות בו-זמנית מצודות רחוקות יותר. (תודותי נתונה לגלעד גבריהו על הצעת הסבר זה.)

עכשיו, כאשר צופים דרך השפופרת כאשר הספינה ניצבת לחוף ובמרחק אלפיים אמה מממנו, רואים את המצודות כך:

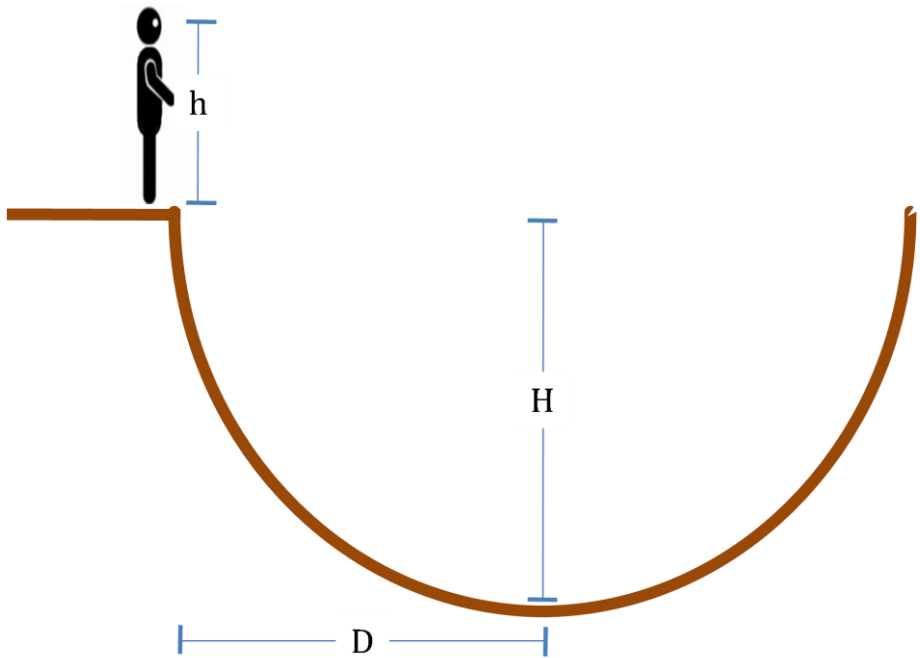


אם המרחק לחוף עולה על אלפיים אמה המצודות נראות קרובות יותר, ואילו המרחק קטן מאלפיים אמה, אי אפשר לראות את שתי המצודות בו-זמנית. וכך רבן גמליאל היה מסוגל לומר שכבר הייתי מסתכל והיינו בתוך התחום עד שלא חשיכה.

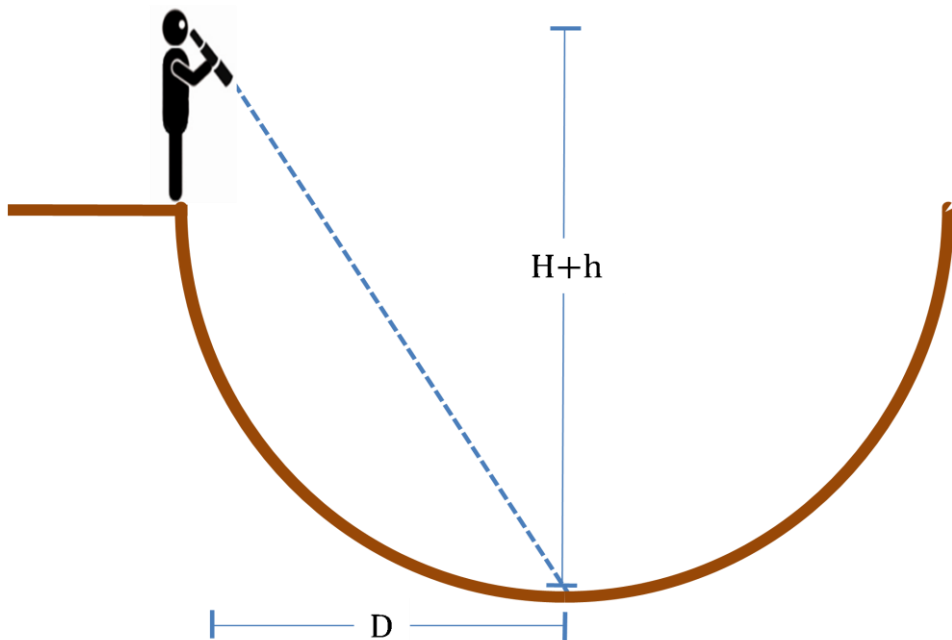
מדידת עומק ללא ידיעה מוקדמת עם שפופרת פשוטה

נסביר כעת את השיטה השנייה של רש"י, השיטה בה ניתן למדוד עומקו של גיא (אחד משימושי השפופרת על פי הבבלי). לעומת השיטה הקודמת כאן אין ידיעה מלכתחילה של מרחק כלשהו, אבל דרושה סדרה של שלוש פעולות כדי למצוא את התשובה. השיטה מתבססת הן על משפט המשולשים הדומים, וכן על חילוץ משתנים בצורה אלגברית.

נקרא לעומק הגיא שברצוננו למדוד H , לגובה העיניים של האדם המודד h , ולמרחק האופקי הלא ידוע בין שפת הגיא לנקודה הנמוכה ביותר D , כפי שמצויר באיור הבא.

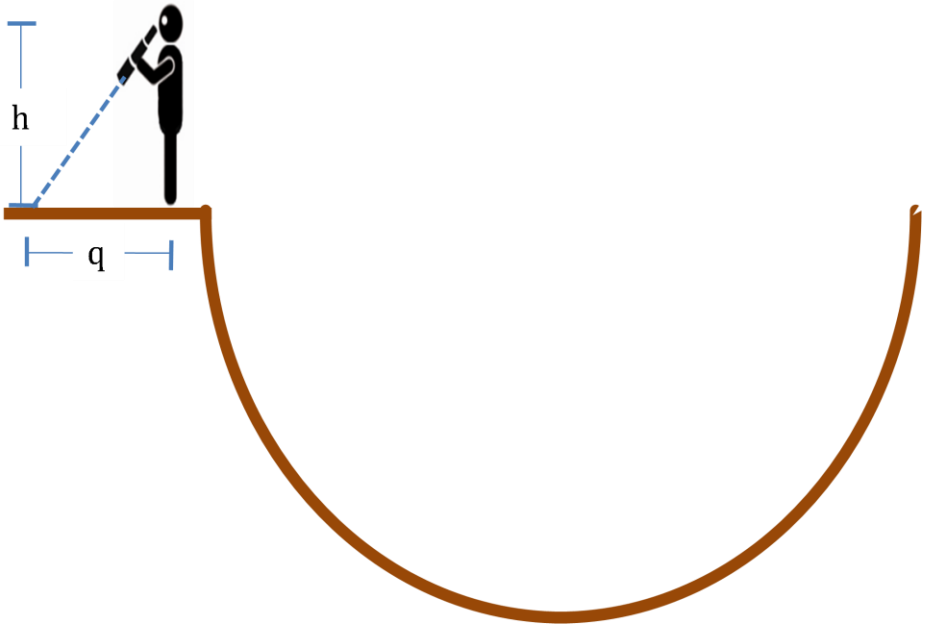


א בשלב ראשון על האדם לעמוד על שפת הגיא ולהביט דרך השפופרת על הנקודה הנמוכה ביותר (כדברי רש"י ילך על שפת הגיא ויצפה בה לעומקו).



נוצר משולש ישר זווית בעל גובה $H+h$ (סכום גובה הגיא וגובה העיניים של האדם) ובסיס D .

ב בשלב שני על האדם להסתובב מבלי לשנות את זווית השפופרת, ורואה נקודה על הקרקע. מודדים את המרחק בין האדם לנקודה הנצפית, אותו נכנה q (מודגם באיור הבא).



נוצר משולש ישר זווית חידש בעל בסיס q וגובה h . משום שזווית השפופרת נשמרה, משולש חדש זה דומה למשולש הקודם (לשני המשולשים זווית ישרה וזווית הצפייה).

לכן, מתוך דמיון שני המשולשים

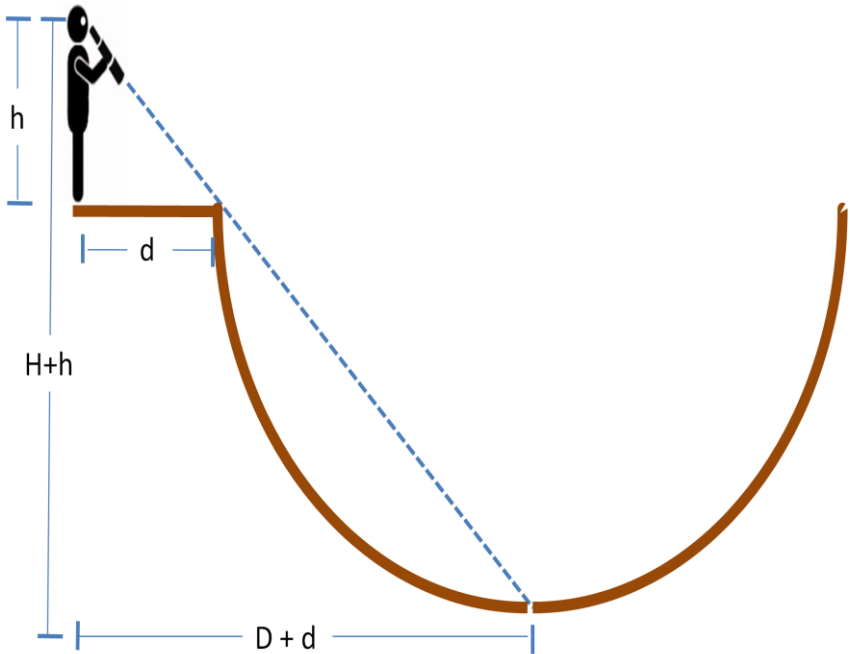
$$\frac{q}{h} = \frac{D}{H+h}$$

קל לחלץ את המרחק הלא ידוע בין שפת D (אותו נצטרך בהמשך).

$$D = \frac{q}{h} (H + h)$$

לכאורה רש"י מדלג על שלב הכרחי זה. אבל יתכן שזאת היתה כוונתו באומרם ואחר כך ילך על שפת הגיא.

ג) בשלב השלישי האדם מסתובב שוב לכיוון הגיא, ומתרחק משפת הגיא עד שאינו רואה את הנקודה העמוקה ביותר בו דרך השפופרת (כדברי רש"י ויתרחק לאחוריו עד שיבחין שבמקום שכלה עומקו של גיא שם כלה צפיית השפופרת, אם יתרחק עוד מעט לא יראה את קרקעית הגיא). נוצרים שני משולשים ישרי זווית דומים חדשים. אחד בעל בסיס d וגובה h , ואחד בעל בסיס $D+d$ וגובה $H+h$. (ראה איור).



מדמיון משולשים נקבל

$$\frac{d}{h} = \frac{D+d}{H+h}$$

עכשיו נוכל להציב את הערך של D אותו מצאנו בשלה הקודם $D = q/h$

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{q}{h}(H+h) + d}{H+h} = \frac{q}{h} + \frac{d}{H+h} \quad (H+h) \text{ ונקבל}$$

$$\frac{d-q}{h} = \frac{d}{H+h} \quad \text{נחסיר עכשיו } q/h \text{ משני האגפים ונקבל}$$

$$H + h = \frac{d h}{d-q} \quad \text{ונחלץ את } H+h \text{ לקבל}$$

$$H = \frac{d h}{d-q} - h = \frac{(d-(d-q))h}{d-q} = \frac{q h}{d-q} \quad \text{ולבסוף נחסיר את } h$$

$$H = \frac{q}{(d-q)} h \quad \text{ומצאנו את התוצאה הסופית:}$$

יש לשים לב שהמכנה חיובי, כלומר d תמיד גדול יותר מ q , משום שזווית הצפייה משפת הבור קטנה מזווית הצפייה במרחק מהשפה.

הביטוי הסופי פשוט להבנה. מחלקים את המרחק q אותו מדדנו בשלב ב' בהפרש בינו לבין המרחק d אותו מצאנו בשלב ג'. יחס זה קובע כמה פעמים יותר עמוק הגיא מגובה העיניים של האדם.

לדוגמא, נניח שגובה העיניים של האדם המשתמש בשפופרת הינו $h = 3$ אמות. כמו כן נניח שבשלב ב' מצאנו מרחק $q=20$ אמות, ובשלב ד' מתרחקים משפת הגיא $d=22$ אמות.

אזי, עומק הגיא יהיה $10 = 20/(22-20)$ עשר פעמים גובה האדם, כלומר 30 אמות.

סיכום

הסברנו את מהות השפופרת שהיתה ברשותו של רבן גמליאל, ואיך אפשר באמצעותה למדוד מרחק לחוף אם יודעים מרחק בין מצודות בחוף, ואיך אפשר למדוד עומקו של גיא.

ראינו שטענת הרמב"ם שלרבן גמליאל היה אסטרולאב הינה אפשרית, אבל דיוקי המדידה אינן מספיקות להסביר את המשנה. מאידך גיסא הרמב"ם מזכיר שתי שיטות מתמטיות (דמיון משולשים וחילוף צלע מתוך נתונים אחרים) שאכן עוזרות לנו להבין את השימושים של השפופרת ואולם הרמב"ם אינו מתאר במפורט את השימוש של השפופרת, באומרו שהדבר יתברר לכל מי שמתמצא בגיאומטריה, ואילו הסבר לא יועיל למי שאינו מתמצא.

ראינו שדברי רש"י בעניין מציאת מרחק נכונים באופן כללי, אם כי הוא אינו מסביר את חשיבות המצודות שהיו לרבן גמליאל, ואינו יודע להסביר שיש להיעזר בדמיון משולשים.

ראינו שדברי רש"י בעניין מדידת עומק גיא, שאינם מובנים בקריאה ראשונה, אכן מתארים במדוייק שיטה מורכבת למדידת עומק גיא.

לבסוף, ראינו שסביר שרש"י הצליח להעביר לנו בצורה מופתית הסברים שקיבל מרבותיו, גם אם לא היה לו הבסיס להצדיקם באופן מתימטי.