6.1 מערכות עיבוד אותות $y_n=f(x)$

מערכת עיבוד אותות: [illegible] input - כ [illegible] output - כ [illegible]
[illegible] (4.11.09 - ב [illegible])

6.2 המערכות הפשוטות

המערכת הקבועה: [illegible] $y(t)=k$ A/D $y_n=k$

מערכת הזהות: $y(t)=x(t)$ A/D $y_n=x_n$

מגבר: A - gain $y(t)=Ax(t)$ A/D $y_n=Ax_n$

מערכת ליניארית: הגדרה: [illegible]
$A(ax_1+bx_2)=a\underbrace{Ax_1}_{y_1}+b\underbrace{Ax_2}_{y_2}$ and $A(cx)=cAx$

מערכת הגבלת טווח: [illegible]
$y(t)=\mathrm{Clip}_\theta(Ax(t))$ A/D $y_n=\mathrm{Clip}_\theta(Ax_n)$ where $\mathrm{Clip}_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x\geq\theta\\ x & \text{else}\\ -\theta & x\leq-\theta\end{cases}$

מערכת לא ליניארית ([illegible] 4.11.09 ,210 'עמ)

hard-limiter: [illegible] $y(t)=\mathrm{sgn}(x(t))$ A/D $y_n=\mathrm{sgn}(x_n)$
[illegible] +1, [illegible] -1 [illegible]
[illegible] מערכת לא ליניארית.

מערכת [illegible]: [illegible] $y(t)=\Theta(x(t))x(t)$ A/D $y_n=\Theta(x_n)x_n$

מערכת [illegible]: [illegible] $y(t)=|x(t)|$ A/D $y_n=|x_n|$
(212-214 'עמ)

general point transformation: $y(t)=f(x(t))$ A/D $y_n=f(x_n)$
[illegible]
[illegible]

6.3 המערכות הפשוטות עם זיכרון

מערכת סיבתית: [illegible] $y_n=f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},x_n)$
[illegible]
[illegible] $y_n=f(x_n,x_{n-1},x_{n-2},\dots,y_{n-1},y_{n-2},\dots)$

state-space description: [illegible] $y_n=f(x_n,\underline{s})$
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]: $y(t)=x(t-T)$ A/D $y_n=x_{n-m}$

מערכת ליניארית: $y_n=f(x_{n-m},x_{n-m+1},\dots,x_{n-1},x_n)=a_m x_{n-m}+a_{m-1}x_{n-m+1}+\dots+a_1x_{n-1}+a_0x_n$
[illegible]

קונבולוציה: [illegible] $y_n=a_0x_{n-2}+a_1x_{n-1}+a_2x_{n+1}+a_{-2}x_{n+2}$
[illegible]
[illegible] $y_n=\sum a_m x_{n-m}$
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible] all-pass filter [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] shifted [illegible] $f.\log$
[illegible]
linear-phase [illegible]

מערכת הזהות $x=y$ היא linear phase עם אפס השהיה כמובן, ערוץ חופף אפס.
θ בשהייה כלל (כלל השהיה מכל נקודת סיבוב) תלוי אם יש linear phase shift וכן.
θ המערכת לא תעוות את האות - linear-phase כלומר למערכת יש zero phase shift כמו כל המערכת.
מה ה-phase shift אינו ליניארי בתדר, תדרים שונים יושהו ויגרמו לעיוות phase distortion.

- $y(t)=x(t)+x(t-T)$ או $y_n=x_n+x_{n-m}$ — **מערכת הד:** המערכת הפשוטה ביותר ואכן...
כמו הקודם המערכת לא אפס all-pass, כלומר הפלט ב-log Σ (או m) התמורה והפאזה.
פאזה שונים מתדרים שונים. אם נעביר גל sin singular ω כך ש-T הוא כפולה
המחזור ($\omega T=2\pi$), התגובה של המערכת היא הגברה כפולה. אם
ההפרש בין T-ל π הוא ($\omega T=\pi$), אז הפלט של המערכת יהיה אפס.
כי הסיבה היא שתדרים resonate ותדרים מתבטלים.

frequency response (fr): תגובת המערכת לגל היא ביטוי של התדר שלו. כל גל סינוס יוצא גל סינוס באותו תדר ($\sin(\omega t)$), כלומר ההגברה והשהייה של התדר:

- $\sin(\omega t)+\sin(\omega(t-T))=2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\sin\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)=A(\omega T)\sin\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)$

אשר הוא גל סינוס באותו תדר עם הגברה לא תלויה בתדר (linear-phase), וכו'
לו השהייה קבועה $T/2$ בזמן. ההגברה היא מקסימלית כאשר $\omega T=2k\pi$ ואפס כאשר
כשהגל מוזז בחצי מחזור π יש ביטול. אם θ תלוי בתדר הגל אז יש עיוות
תדר, זה גם מה שנקרא linear phase ו- periodic amplification. ככל שהמערכת
(סכום ההשהיות של ה-fr הוא אפס) יקרא המסנן של המערכת.

- $y(t)=x(t)+h\,x(t-T)$ או $y_n=x_n+h\,x_{n-m}$ — **מערכת הד עם gain:**
כאשר $h=1$ המערכת הד רגילה, כאשר h קטן מ-1 ההד חלש יותר.

- $y(t)=x(t)-|h|\,x(t-T)$ או $y_n=x_n-|h|\,x_{n-m}$ — **מערכת הד עם gain שלילי:**
הד אשר הופך את phase reversal.

הד עם gain: יש תדרים שבהם ההגברה היא בין $1-|h|$ ל-$1+|h|$
כאשר $|h|\neq 1$ לא יהיה ביטול מלא, והגבר בין $1-|h|$ לבין $1+|h|$.
התדרים של ה-fr משתנים כאשר ... והפאזה של הגל, וכן...
כאשר ... יש הזזה של π בתדר ה-n ...

- $y_n=h_0x_n+h_1x_{n-1}+h_2x_{n-2}+\dots+h_Lx_{n-L}=\sum_{l=0}^{L}h_l x_{n-l}$ — **מסנן MA:** מערכת הממוצעת של הקלט
עם משקלים שונים, זה הוא מסנן ... במקרים מסוימים ניתן לבנות כמו כל
... בעזרת ה-FIR ו-all-zero.
המסנן הוא גם MA. המערכת לינארית ...
... כמו ...

- $y_n=\sum_{l=0}^{L}h_l x_{n-l}$ — **קונבולוציה של המערכת:**
- $y_n=0$ — **Finite Impulse Response - FIR:** ...
for i=0 to L
$y_n \leftarrow y_n+h_i x_{n-i}$

- $y_n=f(x_n,x_{n-1},x_{n-2},\dots,y_{n-1},y_{n-2},\dots)$ — ← **Infinite Impulse Response - IIR:** ...
... y_n ... :
- $y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+\dots+a_Lx_{n-L}+b_1y_{n-1}+b_2y_{n-2}+\dots+b_My_{n-M}=\sum_{l=0}^{L}a_lx_{n-l}+\sum_{m=1}^{M}b_my_{n-m}$
... $\sum$ ... המערכת ...
...

6.4 תכונות של המערכות

- $y(t)=Hx(t)$ או $y_n=Hx_n$ — **operator notation:** ...
H המערכת ...
invertible system: ...
- $x_n=H^{-1}y_n=H^{-1}Hx_n$, $H^{-1}H=1$, $x_n=H^{-1}y_n$ — **inverse** H^{-1} : ...
invertibility ... FIR ... $y_n=x_n-x_{n-1}$ של inverse: $x_n=y_n+x_{n-1}$
... IIR ...: $x_n=y_n+(y_{n-1}+x_{n-2})=y_n+y_{n-1}+(y_{n-2}+x_{n-3})=y_n+y_{n-1}+y_{n-2}+\dots$
- $x_n=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$ — ...

- $H(x+y)=Hx+Hy$ או $H(cx)=cHx$ — **מערכת לינארית אם:**

מערכת יציבה: אם לכל כניסה bounded המוצא יהיה bounded.

מערכת היא time-invariant אם: מתקיים:
- $y(t)=Hx(t) \to y(t+T)=Hx(t+T)$

הזזה בזמן של הכניסה גוררת רק הזזה בזמן של המוצא באותה מידה.

מערכת time-variant: יש שינוי במבנה המערכת עם הזמן.

filter: מסנן היא מערכת H שהיא לינארית ובלתי תלויה בזמן (LTI).

מערכת ללא זיכרון: ערך המוצא תלוי רק בערך הכניסה באותו רגע.

מערכת סיבתית: אם המוצא בזמן T תלוי רק בערכי הכניסה בזמן הנוכחי ובזמנים קודמים $T \geq t$.

מערכת לא סיבתית [illegible] LTI [illegible] [illegible].

מערכת streamable: [illegible]

מערכת realizable: סיבתית ויציבה, [illegible]

מערכת real time: סיבתית ו-streamable. [illegible] real-time [illegible]

6.5 [illegible]

מסנן (מערכת) LTI [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

eigensignals של מסנן: [illegible]

[illegible]

[illegible] H_n

- $Y_n = H_n X_n$

6.6 MA [illegible]

(1) בעיה: [illegible] $x=k$ [illegible]:

[illegible] (v [illegible]):

- $y_n = x_n + v_n$
- $\frac{1}{L}\sum_{\ell=0} y_\ell \approx x$

(2) בעיה: [illegible] blurring

[illegible] y_n:

$z_n = \frac{1}{L}\sum_{\ell=0} y_{n+\ell} \approx x_n$

- $\underbrace{y_0, y_1, \dots, y_{L-1}}_{z_0}, y_L, y_{L+1}, \dots, \overbrace{y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+L-1}}^{z_j}, y_{j+L}, y_{j+L+1}, \dots$

[illegible] z_n [illegible]

[illegible]: $\underbrace{y_0, y_1, \dots, y_{L-1}}_{z_0}, \underbrace{y_L, y_{L+1}, \dots, y_{2L-1}}_{z_1}, y_{2L}, y_{2L+1}, \dots, y_{3L-1}, \dots$

(3) בעיה: [illegible] z_n [illegible]

[illegible] MA [illegible]

moving average. [illegible] MA [illegible] z_n [illegible] z_n [illegible]:

- $z_n = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} a_\ell y_{n-\ell} \quad ; a_\ell = \frac{1}{L}$

(4) בעיה: [illegible] x_n [illegible] MA-ב [illegible] $z_n = \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}y_{n+1}$

[illegible] MA [illegible]

מסנן MA הכללי ביותר:
- $z_n = \sum_{\ell=-L}^{L} h_\ell y_{n+\ell}$

[illegible] realizable [illegible]:
- $z_n = \sum_{\ell=-L}^{0} h_\ell y_{n+\ell} = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell-L} y_{n+\ell-L}$

[illegible] z_n [illegible] x_n.

6.10 משוואות הפרש

מודל MA: הפלט תלוי בקלטים הנוכחיים והקודמים
מודל AR: הפלט תלוי בקלט הנוכחי ובפלטים קודמים — Auto Regressive
מודל ARMA: הפלט תלוי בקלט הנוכחי, L קלטים קודמים, ו-M פלטים קודמים:

$M=0$ ← מודל MA, $L=0$ ← מודל AR

- $y_n = \sum_{\ell=0}^{L} a_\ell x_{n-\ell} - \sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}$

משוואת הפרש: ניתן גם לכתוב:

- $\sum_{m=0}^{M} \beta_m y_{n-m} = \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell x_{n-\ell}$, $\alpha_\ell = a_\ell$, $\beta_m = \begin{cases} 1 & m=0 \\ -b_m & \text{אחרת} \end{cases}$

[illegible] כי x גורם ל-y [illegible] המערכת [illegible].
[illegible]: [illegible] את המערכת ההפוכה:

- $x_n = y_n - \sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m} - \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell x_{n-\ell}$

משוואת ההפרש בעזרת אופרטור ההזזה [illegible]:

- $\sum_{m=0}^{M} \beta_m z^{-m} y_n = \sum_{\ell=0}^{L} a_\ell z^{-\ell} x_n$

עם הפרשים סופיים:

- $\sum_{m=0}^{M} \beta_m \Delta^m y_n = \sum_{\ell=0}^{L} A_\ell \Delta^\ell x_n$

[illegible] כי [illegible] ההפרש [illegible]: $\sum_{m=0}^{M} \beta_m y^{[n-m]}(t) = \sum_{\ell=0}^{L} a_\ell x^{[n-\ell]}(t)$
[illegible] ARMA נקרא משוואת הפרש (הסבר עמ' 247)
[illegible] הפרשים. כ-[illegible] ההפרש [illegible]
[illegible] T, [illegible] משוואות הפרש [illegible].

6.12 תיאור המערכת - תגובת תדר

[illegible] המערכת [illegible] לינאריות, [illegible].
[illegible] realizable [illegible].
[illegible].
[illegible] (1) [illegible] (2) [illegible].

→ [illegible] (frequency response)

[illegible] פורייה [illegible].
[illegible].
פורייה, [illegible] פורייה [illegible].
[illegible] eigensignals [illegible].
[illegible].

[illegible]: $x_n = X_1 \sin(\omega_1 n) + X_2 \sin(\omega_2 n) + X_3 \sin(\omega_3 n)$
[illegible]: $H_1 \sin(\omega_1 n + \phi_1)$, $H_2 \sin(\omega_2 n + \phi_2)$, $H_3 \sin(\omega_3 n + \phi_3)$
[illegible] פורייה:

$y_n = H_1 X_1 \sin(\omega_1 n + \phi_1) + H_2 X_2 \sin(\omega_2 n + \phi_2) + H_3 X_3 \sin(\omega_3 n + \phi_3)$

[illegible] DFT [illegible]:
[illegible] X_k: $H_k e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$

- $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$

[illegible]:

- $y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k H_k e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$

H_k [illegible] (ϕ-ו A [illegible]) [illegible] frequency response-ה [illegible]
[illegible].

→ [illegible] impulse

[illegible] impulse response-ה [illegible]
[illegible]
[illegible],
[illegible]
eigensignals [illegible].
[illegible]
time shifts [illegible]
[illegible]
[illegible].

ה-impulse response [illegible] FIR, IIR [illegible]
[illegible] impulse response [illegible] frequency response [illegible]

$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x_{n-i}$

(6.53) $H(\omega) x_n = y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{i\omega(n-k)}$ [illegible] $x_n = e^{i\omega n}$ [illegible]

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k} e^{i\omega n} = H_n x_n$

[illegible] gain [illegible] FT [illegible]
[illegible] FT [illegible] FT [illegible] FT [illegible]

6.8 קונבולוציה

$x * y = \sum_i x_i y_{n-i}$

(1) הכפלת פולינומים:

- $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;,\; B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x^3 + a_2 b_2 x^4$

- $A(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \;,\; B(x) = \sum_{j=0}^{M} b_j x^j$

$A(x) B(x) = \sum_{k=0}^{N+M} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k = \sum_{k=0}^{N+M} (a*b)_k x^k$

(2) הכפלת מספרים: [illegible]

$AB = \sum_{k=0}^{d_a + d_b} (a*b)_k 10^k$

[illegible] (23 [illegible]).

(3) [illegible]

$y_0 = a_{-1} x_1 + a_0 x_0 + a_1 x_{-1}$
$y_1 = a_{-1} x_2 + a_0 x_1 + a_1 x_0$ ← [illegible] 1
$y_2 = a_{-1} x_3 + a_0 x_2 + a_1 x_1$ ← [illegible] 2

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

[illegible] Toeplitz [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

- $y = h * x \;:\; y_n = \sum_k a_k x_{n-k}$ [illegible]
$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$
- $X(\omega) = FT(x(t)) \;,\; H = FT(h) \;,\; Y(\omega) = FT(y(t))$
- $H_k = DFT(h_n) \;,\; X_k = DFT(x_n) \;,\; Y_k = DFT(y_n)$

- [illegible] z transform: $x_n \longleftarrow x(d) = \sum_n d^n$
[illegible]
[illegible] z transform [illegible] log [illegible] z [illegible]

6.9 MA [illegible]

[illegible]

[illegible] 3 point average:

- $y_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$

$x_n = \delta_{n,0}$: $x_n = \ldots 0\,0\,0\,1\,0 \ldots$
$y_n = 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,0\,0\,0 \ldots$

$x_n = e^{i\omega n}$: $y_n = \frac{1}{3}\left[e^{i\omega(n-1)} + e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+1)}\right]$
$= \underbrace{\frac{1}{3}\left[e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega}\right]}_{H(\omega)} \underbrace{e^{i\omega n}}_{x(\omega)}$

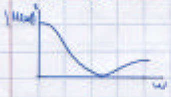
[illegible]
- [illegible] $H(\omega)$ [illegible] (2.3)
[illegible]

ממוצע הרץ:

$H(\omega)=\frac{1}{3}(1+e^{-i\omega}+e^{i\omega})=\frac{1}{3}(1+2\cos(\omega))$

כדי לקבל את התגובה צריך $|H(\omega)|^2$. מסנן זה הוא low-pass

זה המקרה הכי [illegible] של [illegible]:



מסנן MA, 3point average (נק'):

- $y_n=\frac{1}{4}x_{n-1}+\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$

$\underline{x_n=e^{i\omega n}}:\ Y(\omega)=\frac{1}{4}e^{i\omega(n-1)}+\frac{1}{2}e^{i\omega n}+\frac{1}{4}e^{i\omega(n+1)}$
$=\underbrace{\left[\frac{1}{4}e^{-i\omega}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}\right]}_{H(\omega)}\underbrace{e^{i\omega n}}_{X(\omega)}$

גם מסנן low-pass, אך הרבה יותר טוב [illegible]

$H(\omega)=\left(\frac{1}{4}e^{-i\omega}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{i\omega}\right)=\frac{1}{2}(1+\cos(\omega))$

[illegible] (234-235 עמ')

- ממוצע הרץ כאשר לוקחים [illegible]:

$y_n=\frac{1}{2N+1}\sum_{l=-N}^{N}x_{n+l}\ ,\ H(\omega)=\frac{\sin(\frac{L\omega}{2})}{L\sin(\frac{\omega}{2})}$

[illegible] side-lobes [illegible] main lobe [illegible] oscilatory [illegible]

[illegible].

מסנן high-pass:

- $y_n=\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$

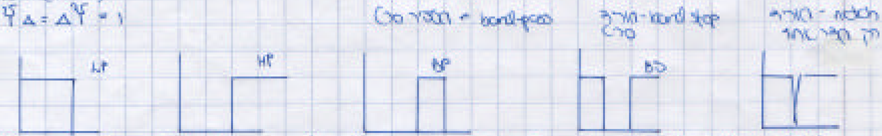
$y_n=x_n+y_{n-1}$

$y_n=x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}+x_{n-4}\cdots$

$y=\underbrace{(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots)}_{\Psi}x$

$\Delta=(1-z^{-1})$

[illegible] $=\ \Psi\Delta=\Delta\Psi=1$



[illegible] DC [illegible]

[illegible] Nyquist: $\ldots,1,-1,1,-1,1$ [illegible] DC [illegible] low-pass...

הערה: [illegible] input.

6.9 מסננים רקורסיביים

[illegible]

(6.32) • $y_n=x_n-\sum_{m=1}^{M}b_m y_{n-m}$ [illegible] AutoRegressive (AR):

[illegible]

[illegible] controlled

- [illegible] FIR [illegible] IIR [illegible]:

- $y_n=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}x_l$ [illegible]:

[illegible]

- $y_n=\frac{n\,y_{n-1}+x_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(n\,y_{n-1}+x_n)=\frac{1}{n+1}x_n+\frac{n}{n+1}y_{n-1}$

[illegible]: • $\boxed{y_n=\alpha x_n+\beta y_{n-1}}$; $\alpha=\frac{1}{n},\ \beta=\frac{n}{n+1},\ \alpha+\beta=1$

[illegible] AR [illegible] M=1:

(6.34) • $y_n=(1-\beta)x_n+\beta y_{n-1}\ ;\ 0\le\beta<1$

[illegible] 6.32 [illegible]

[illegible] MA [illegible] β [illegible] AR [illegible]

[illegible] $\beta=0$

[illegible] y_n [illegible] AR [illegible]

[illegible] β [illegible]

[illegible]

[illegible].

[illegible] 6.34 [illegible] MA [illegible]
[illegible] MA [illegible]
[illegible] (β) [illegible]
β [illegible] β [illegible]
[illegible] AR [illegible] MA [illegible]
β [illegible]:

6.34 →
$$y_n=(1-\beta)x_n+\beta y_{n-1}=(1-\beta)x_n+\beta(1-\beta)x_{n-1}+\beta^2 y_{n-2}=(1-\beta)x_n+\beta(1-\beta)x_{n-1}+\beta^2(1-\beta)x_{n-2}+\beta^3 y_{n-3}$$
$$=(1-\beta)x_n+\beta(1-\beta)x_{n-1}+\beta^2(1-\beta)x_{n-2}+\beta^3(1-\beta)x_{n-3}+\dots$$

[illegible] x_{n-2} [illegible] x_n [illegible] β^2 [illegible]
[illegible] 1.

[illegible] AR [illegible]: $y_n=H(\omega)e^{i\omega n}$; $x_n=e^{i\omega n}$

$$y_n=(1-\beta)e^{i\omega n}+\beta(1-\beta)e^{i\omega(n-1)}+\beta^2(1-\beta)e^{i\omega(n-2)}+\dots$$
$$=(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^n e^{i\omega n}=\frac{(1-\beta)}{(1-\beta e^{-i\omega})}e^{i\omega n}=H(\omega)\cdot e^{i\omega n}$$ ([illegible] 243)

[illegible]:
$$|H(\omega)|^2=\frac{1-2\beta+\beta^2}{1-2\beta\cos(\omega)+\beta^2}$$

סינון AR שימושי נוסף:

$$y_n=x_n+y_{n-1}$$
$$y_n=x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+\dots=\sum_{m=0}^{\infty}x_{n-m}$$
[illegible]:
$$y=(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots)x=\Sigma x$$
[illegible]:
[illegible] → $$\Sigma=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m}x_n$$
[illegible].
[illegible] $\Delta=(1-z^{-1})$ [illegible] Σ [illegible]: $\Delta\Sigma=\Sigma\Delta=1$
[illegible] Σ [illegible]
[illegible] (6.7) [illegible]
[illegible] MA.

[illegible]: $$\Sigma(\beta e^{-i\omega})^n=\frac{1-\beta}{1-\beta^{-i\omega}}$$

[illegible] 21.10.04

[illegible]:

$$y=x+\varepsilon x^2$$
$$y_n=x_n+\varepsilon x_n^2$$
$x_n=e^{i\omega n}$: $y_n=e^{i\omega n}+\varepsilon e^{i2\omega n}$ [illegible]
[illegible] (ω [illegible]).
[illegible] $e^{i\omega n}+e^{i\omega_2 n}$ [illegible],
[illegible]

[illegible]:

mixer: [illegible]
[illegible]: [illegible]
[illegible]: [illegible]
[illegible]
$$y(t)=x(t)\cdot e^{-i\Omega t}$$
FT: $$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int y(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int x(t)e^{-i\Omega t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int x(t)e^{-i(\omega+\Omega)t}dt$$
[illegible]

[illegible]: [illegible]:
$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(\tau-t)dt\xleftrightarrow{FT}X(\omega)Y(\omega)$$

[illegible]: [illegible]
[illegible]
FT: $$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int x(t)e^{-i\omega t}dt$$
iFT: $$x(t)=\int X(\omega)e^{+i\omega t}d\omega$$

[illegible]

$$iFT(X(\omega)Y(\omega))=\int X(\omega)Y(\omega)e^{+i\omega t}=\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,Y(\omega)e^{+i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\Big(x(\tau)\overbrace{\int Y(\omega)e^{-i\omega(\tau-t)}d\omega}^{y(t-\tau)}\Big)d\tau$$
$$=\int x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

[illegible]

FIR: $y_n=\sum_{\ell} a_\ell x_{n-\ell}$ [illegible] :

[illegible] IIR [illegible] IIR, [illegible]

[illegible] → IIR: $y_n=\sum_{\ell=0}^{L} a_\ell x_{n-\ell}-\sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}$ [illegible] IIR.

6.11 [illegible] (249 [illegible])

6.8 [illegible] ([illegible])

[illegible]: $x_0\neq 0$ [illegible] ($L=2$)

[illegible] FIR [illegible] $L+1=3$:

- $y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

$x_0 \quad y_0 \quad y_0=a_0x_0 \quad a_0=\frac{y_0}{x_0} \Leftarrow$ [illegible]

$x_1 \quad y_1 \quad y_1=a_0x_1+a_1x_0 \quad a_1=\frac{y_1-a_0x_1}{x_0}$

$x_2 \quad y_2 \quad y_2=a_0x_2+a_1x_1+a_2x_0 \quad a_2=\frac{y_2-a_0x_2-a_1x_1}{x_0}$

[illegible] $x_0 \ldots x_n$ [illegible] $a_0\ldots a_{n-1}$, $y_0\ldots y_n$

$$\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0&0&0\\x_1&x_0&0\\x_2&x_1&x_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

[illegible]:

[illegible] Toeplitz [illegible]

[illegible] L [illegible] $L+1$

[illegible] $\frac{1}{2}(L+1)$ [illegible] $L+1$ [illegible]

[illegible]: x_0 [illegible] 0 [illegible] $\neq 0$ [illegible] $n=0$) ($L=2$)

- $y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

$x_n \quad y_n \quad y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

$x_{n+1} \quad y_{n+1} \quad y_{n+1}=a_0x_{n+1}+a_1x_n+a_2x_{n-1}$

$x_{n+2} \quad y_{n+2} \quad y_{n+2}=a_0x_{n+2}+a_1x_{n+1}+a_2x_n$

[illegible] 3 [illegible]

[illegible] y_n, y_{n+1}, y_{n+2} [illegible] 5

[illegible]: $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$

[illegible] Wiener-Hopf

$$\begin{pmatrix}y_n\\y_{n+1}\\y_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n&x_{n-1}&x_{n-2}\\x_{n+1}&x_n&x_{n-1}\\x_{n+2}&x_{n+1}&x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

[illegible]

[illegible] (3) [illegible]

[illegible] $N=L+1$ [illegible]

[illegible] $O(N^3)$ [illegible] $O(N^{2.807})\sim O(N^{\log_2 7})$ [illegible]

[illegible] $O(N^2)$.

[illegible]

IIR [illegible]: AR [illegible]: $M=3$ [illegible]

[illegible]

[illegible] Yule-Walker:

[illegible]

- $y_n=x_n+\sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}$
- $y_n=x_n+b_1y_{n-1}+b_2y_{n-2}+b_3y_{n-3}$

$y_{n+1}=x_{n+1}+b_1y_n+b_2y_{n-1}+b_3y_{n-2}$

$y_{n+2}=x_{n+2}+b_1y_{n+1}+b_2y_n+b_3y_{n-1}$

$$\begin{pmatrix}y_n\\y_{n+1}\\y_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\x_{n+2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_{n-1}&y_{n-2}&y_{n-3}\\y_n&y_{n-1}&y_{n-2}\\y_{n+1}&y_n&y_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$y=x+Yb$ [illegible]: $b=Y^{-1}(y-x)$

[illegible]

[illegible]

ARMA [illegible]: $L=2$ $M=3$

[illegible] 6 [illegible]:

- $y_n=\underbrace{\sum_{\ell=0}^{L} a_\ell x_{n-\ell}}_{MA}+\underbrace{\sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}}_{AR}$

$y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+b_1y_{n-1}+b_2y_{n-2}+b_3y_{n-3}$

$y_{n+1}=a_0x_{n+1}+a_1x_n+a_2x_{n-1}+b_1y_n+b_2y_{n-1}+b_3y_{n-2}$

$y_{n+2}=a_0x_{n+2}+a_1x_{n+1}+a_2x_n+b_1y_{n+1}+b_2y_n+b_3y_{n-1}$

$y_{n+3}=a_0x_{n+3}+a_1x_{n+2}+a_2x_{n+1}+b_1y_{n+2}+b_2y_{n+1}+b_3y_n$

$y_{n+4}=a_0x_{n+4}+a_1x_{n+3}+a_2x_{n+2}+b_1y_{n+3}+b_2y_{n+2}+b_3y_{n+1}$

$y_{n+5}=a_0x_{n+5}+a_1x_{n+4}+a_2x_{n+3}+b_1y_{n+4}+b_2y_{n+3}+b_3y_{n+2}$

[illegible]

$y_n = \sum_{k=0}^{?} a_k x_{n-k} + \sum_{m=1}^{?} b_m y_{n-m}$ ([illegible])

[illegible] ARMA - [illegible] MA - [illegible] AR [illegible]

[illegible]

11.10 z-transform

[illegible] FT [illegible] continuous [illegible] DFT [illegible] discrete [illegible] (FS [illegible] discrete [illegible]). ZT [illegible]

ZT - [illegible]

[illegible]

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n}$$

[illegible]

$s_0=1,\ s_1=1,\ s_n = s_{n-1}+s_{n-2}\quad n\geq 2:\ 1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$

[illegible]

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\dots$

[illegible]

$s_n = s_{n-1}+s_{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} s_{n-2}x^n$

$= x\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-2}x^{n-2}$

$= x\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$

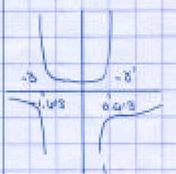
$S(x) - s_0x^0 - s_1x^1 = x(S(x)-s_0x^0) + x^2 S(x)$

$= x(S(x)-1) + x^2 S(x)$

$S(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{-1}{(x+\phi)(x+\phi')}$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [illegible] $= -\frac{1}{\phi} = \cos(\frac{\pi}{5})$

[illegible] $-\phi$ [illegible] $-\phi'$



[illegible]

[illegible] 'partial fraction expansion'.

$S(x) = \frac{-1}{(x+\phi)(x+\phi')} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx}\right)$, $a+b = -ab = 1$, $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n$ geometric progression [illegible]

$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (\phi')^{n+1}\right)$

[illegible]

$$\boxed{S(z) = ZT(s_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n}}$$

[illegible] z [illegible] x [illegible]

[illegible] z^{-1} [illegible] x [illegible] z [illegible]

[illegible] z^{-1} [illegible] s_n [illegible] s_{n-1} [illegible]

[illegible] Z [illegible] $z^{-1}(z-1)$ [illegible]

[illegible]

ZT [illegible] Region of convergence [illegible]

[illegible]

ב) מספר מרוכב z, ייצוג קרטזי ופולרי: $z=x+iy=re^{i\omega}$

r - magnitude, ו-ω - הזווית. אם z על מעגל היחידה: $z=e^{i\omega}$ אז נקבל את ה-ZT על מעגל היחידה

ב-z-plane: $X(\omega)=X(z)|_{z=e^{i\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}x_n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x_n e^{-i\omega n}$

אז הוא בעצם DTFT. ZT הוא הכללה של DFT או ההתמרה על מעגל היחידה.

מתי ZT מתכנס: בסדרות הנדסיות ההתכנסות תלויה בערך המוחלט (מתכנס בהחלט):

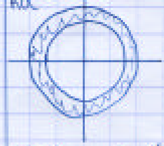
אם הסכום: $A=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$: מתכנס (אזי $S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)

מכיוון שעבור ZT הוא $\sum x_n z^{-n}$, כיוון שעבור ZT הוא ... התכנסות בהחלט

כאשר $\xi=z^{-1}$: $A=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n||z|^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}|a_n||z|^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^{-n}=\sum|a_{-n}||\xi|^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z^{-1}|$

כאשר לא ... $|z|$ קטן, ולכן מתכנס ... $|z|^{-n}$ של המקדמים.

ROC



ROC של ZT הוא באופן כללי ב-z-plane בתחום טבעת (annulus). אם ... $r=0$ ... $r=\infty$ ... ב-z-plane ... ∞

לכן הוא כולל את מעגל היחידה.

דוגמא:

$y_n=x_{n-1}$, $y=z^{-1}x$

$ZT(x_{n-1})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{n-1}z^{-n}$ $\quad(z^{-n}=z^{-1}z^{-(n-1)})$

$=z^{-1}\sum x_n z^{-n}$

$ZT(x_{n-1})=z^{-1}ZT(x_n)$

$x_{n-1}=z^{-1}x_n$

פתרון בעיה הפוכה של זיהוי מערכות בעזרת ZT

[illegible]

$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)\longrightarrow H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

[illegible]

$y=h*x$ [illegible] FIR [illegible] $h=y/x$ [illegible] ZT [illegible] FT ו-DFT [illegible] z:

$Y(z)=H(z)X(z)$

$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_n z^{-n}$, $y_n=\sum_{\ell}h_\ell x_{n-\ell}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}h_\ell x_{n-\ell})z^{-\ell-m}$

$=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}h_\ell\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{n-\ell}z^{-n}$

$=(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}h_\ell z^{-\ell})(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_m z^{-m})$

$=\quad H(z)\quad X(z)$

ה-ZT של [illegible] h [illegible] transfer function [illegible] $z=re^{i\omega}$, ה-transfer function [illegible] $(z=e^{i\omega})$ ה-transfer function [illegible] $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$ [illegible] transfer function

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

[illegible] $z=e^{i\omega}$, [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] 2 [illegible] (x ו-y) $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

[illegible] $H(z)$ [illegible]

[illegible]: [illegible] z [illegible]

[illegible] z [illegible] H [illegible] ZT - inverse [illegible] Y.

7.5 ARMA Transfer Function

[illegible] H [illegible]: $Y(z)=H(z)X(z)$

[illegible] $X(z)$ ו-$Y(z)$ ה-ZT [illegible].

- [illegible] H [illegible] ARMA: $y_n=\sum_{\ell=0}^{L}a_\ell x_{n-\ell}+\sum_{m=1}^{M}b_m y_{n-m}$

ARMA [illegible]: α - [illegible] FIR, β - [illegible] FIR $\sum_{m=0}^{M}\beta_m y_{n-m}=\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell x_{n-\ell}$

[illegible] $\beta_0=1$ [illegible] α ו-β [illegible] FIR, AR ו-ARMA

[illegible] ZT [illegible]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{M}\beta_m y_{n-m}\right)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell x_{n-\ell}z^{-n}$$

$$\sum_{m=0}^{M}\beta_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_{n-m}z^{-n}=\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{n-\ell}z^{-n}$$

$$\sum_{m=0}^{M}\beta_m z^{-m}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}y_\nu z^{-\nu}=\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell z^{-\ell}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}x_\nu z^{-\nu}$$

$$\left(\sum_{m=0}^{M}\beta_m z^{-m}\right)Y(z)=\left(\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell z^{-\ell}\right)X(z)$$

- [illegible] H [illegible] ב-z^{-1} $Y(z)=\underbrace{\frac{\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell z^{-\ell}}{\sum_{m=0}^{M}\beta_m z^{-m}}}_{H(z)}X(z)$

[illegible] $H(z)$ [illegible] a ו-b $H(z)=\frac{\sum_{\ell=0}^{L}a_\ell z^{-\ell}}{1-\sum_{m=1}^{M}b_m z^{-m}}$

[illegible] H [illegible]

- פילטר AR: L=0, [illegible] gain-ה [illegible] ($a_0=1$) $H(z)=\frac{1}{1-\sum_{m=1}^{M}b_m z^{-m}}$
- פילטר MA: [illegible] b_m [illegible] $b_0=1$: $H(z)=\sum_{\ell=0}^{L}a_\ell z^{-\ell}$
- [illegible] z^{-1}, [illegible] z [illegible] z^{M-L}: $H(z)=z^{M-L}\frac{\sum_{\ell=0}^{L}\alpha_\ell z^{L-\ell}}{\sum_{m=0}^{M}\beta_m z^{M-m}}$

$H(z)$ [illegible] z

[illegible] $H(z)$ [illegible] ARMA [illegible] G

- [illegible] M [illegible] factored [illegible]: $\sum_{i=0}^{n}c_i x^i=G\prod_{i=1}^{n}(x-\zeta_i)$

[illegible]

[illegible] complex conjugate pairs

[illegible] $H(z)$:

$$H(z)=z^{M-L}\frac{\prod_{\ell=1}^{L}(z-\zeta_\ell)}{\prod_{m=1}^{M}(z-\pi_m)}$$

- [illegible] gain-ה [illegible] z^{M-L} [illegible] $H(z)$
- [illegible] MA - [illegible]: FIR ≡ MA ≡ All-zero filter
- [illegible] AR - [illegible]: AR ≡ All-pole filter

[illegible] (transfer func.) [illegible] $\zeta=e^{i\omega}$

[illegible] ARMA

[illegible]

[illegible]

[illegible] destabilizes [illegible] Pole-zero [illegible] gain-ה [illegible]

[illegible]

7.6 Pole-Zero Plots

[illegible] z-plane plots [illegible] ZPP [illegible]

[illegible] PZP [illegible] ARMA [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] unity [illegible] pzp-ה [illegible]

[illegible]