סיכום DSP

הגדרות

אות אנלוגי: פונ' של משתנה רציף אחד t, כרגיל: $s(t): -\infty \le t \le \infty$

אות ספרתי: סדרה אינסופית של ערכים בזמן בדיד: $s_n: n=-\infty \dots +\infty$

דרישות הסיגנל: אות אנלוגי צריך להיות בעל ערך סופי בכל נקודה, רק מעטים מהסיגנלים בעולם האמיתי: סופיים בכל ערך, סיגנל מוגבל ע"י 3 תנאים: (1) ערך סופי (2) אנרגיה סופית (3) כמות סך סופי. סיגנל צריך להיות מוגדר לכל זמן.

אנרגיה: ריבוע של ערך הסיגנל, סכום ערכי הסיגנל בריבוע (ב-Volt^2): • $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$

אנרגיה של קטע בזמן מוגדרת בדרך דומה.

שורש האנרגיה חלקי זמן של סיגנל נקרא ערך RMS: • $E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2$

(Root Mean Squared Value)

רוחב סרט: מספר התדרים בסיגנל, התדר המקסימלי של סיגנל. כמה חלק ... smoothness, החלק קבוע ...

כוח: אנרגיה פר זמן:

$P_s(T) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T-\frac{T}{2}}^{T+\frac{T}{2}} s^2(t)dt$

$P_{s_n} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=v-\frac{N}{2}}^{v+\frac{N}{2}} s_n^2$

סיגנלים פריודיים ... להיות ... אנרגיה אינסופית, אבל כוח סופי ...

דגימה: המרת אות אנלוגי לאות ספרתי, ... קוונטיזציה ...

אותות בסיסיים

DC - אות קבוע: אנרגיה אינסופית, ... $s(t)=1$ (0) A|D $s_n=1$

סיגנל המדרגה: ... $s(t)=\Theta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\1 & t>0\end{cases}$

$s_n=\Theta(n)=\begin{cases}0 & n<0\\1 & n\ge 0\end{cases}$

(unit step)

UI - Unit Impulse: ... $s_n=\delta_{n,0}$ — Kronecker delta

SUI - Shifted Unit Impulse: ... $n=m$ ... $s_n=\delta_{n,m}$

... $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt=1$ ... $s(t)=\delta(t)$

סיגנל סינוס: $\omega=2\pi f$, $f=\frac{1}{T}$ (Hz), T-מחזור $s(t)=A\sin(\omega t)$ A|D $s_n=A\sin(\omega n)$

$A\sin(\omega t+\Phi)+B$: A-amplitude, ω-frequency, Φ-phase, B-DC component

מחזורי: $\sin(\omega(t+T))=\sin(\omega t)$ A|D $\sin(\omega(n+N))=\sin(\omega n)$

...

סיגנל אקספוננט יורד: $s(t)=e^{-\lambda t}$ A | D $s_n=e^{-\lambda n}$

λ-ו חיובי עבור סיגנל סופי. אחרת, הולך לאינסוף מהר explodes violently

הערה: לא כל סיגנל עם אנרגיה סופית מוגבל בזמן

סיגנלים מרוכבים:

נוסחת אוילר: הקשר בין סינוס ל-e:

$Ae^{i\omega t}=A\cos(\omega t)+iA\sin(\omega t)$

אקספוננט מרוכב → $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$

$e^{i\pi}=-1$

- אקספוננט של מרוכב הוא צירוף ממשי ומדומה.
- אקספוננט מרוכב הוא סכום סינוס וקוסינוס.

ב' אקספוננטים מרוכבים הם סיגנלים קומפלקסים. כאשר A ממשי: $s(t)=Ae^{i\omega t}$

כשנתון רק החלק הממשי הוא החלק הממשי: $s(t)=A\,\mathrm{Re}\,s(t)=A\cos(\omega t)$

מכיוון שהחלק המדומה הוא 90° (חצי מחזור) מהחלק הממשי של הסיגנל המרוכב, הוא נקרא quadrature component. כפל של סיגנלים מרוכבים הוא חיבור של הפאזות:

$S_1(t)=\sin(\omega_1 t),\ S_2(t)=\sin(\omega_2 t)$

$S_1(t)\cdot S_2(t)=\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\ :\ S_1(t)\cdot S_2(t)=e^{i\omega_1 t}\cdot e^{i\omega_2 t}=e^{i(\omega_1+\omega_2)t}$

תכונות של סיגנלים

(1) סיגנל דטרמיניסטי: הוא סיגנל שבו מכירים (ערכים/אלגוריתם) המאפשרים לחשב את ערכו בכל זמן t.

סיגנל סטוכסטי: לא ניתן לחשב את ערכו בכל זמן. ידועים רק תכונות שלו.

רעש לבן: סיגנל אקראי שבו ... מהסיגנל ... השפעתו הגבוהה על ...

... שלו, ... אנרגיה ... אינסופית ...

סיגנל אקראי של המספרים ... (מקסימום) - ...

... המספרים ...

- Signal to noise Ratio (SNR) - ... : $SNR(dB)=10\log_{10}\frac{E_s}{E_n}=10(\log_{10}E_s-\log_{10}E_n)$

זה יחס האנרגיה של הסיגנל לאנרגיה של הרעש

(2) לא דטרמיניסטי: אפשר לא לחזור.

לא סטוכסטי: סיגנל ... של ... (...), ... קבועים ... לאורך זמן אז הוא סטציונרי

(3) of finite or infinite time duration: סיגנלים ... הם המספרים ... $n:-\infty<n<\infty$, $-\infty<t<\infty$

... סיגנלים ... סופי, ...

... peak- ... סיגנל ... סופי.

(4) of finite bandwidth or full spectrum: סיגנל ... בתדרים ...

... full spectrum.

אריתמטיקה של סיגנלים

אופרטור כפל של סיגנלים: מספר ממשי:

הכפלה של ... של סיגנל

... של סיגנל →

$y=ax$
means
$y(t)=ax(t)\ \forall t$

A | D

$y=ax$
means
$y_n=ax_n\ \forall n$

היפוך סימן:

... power spectrum ...

...

$y=-x$
means
$y(t)=-x(t)\ \forall t$

A | D

$y=-x$
means
$y_n=-x_n\ \forall n$

אופרטור היפוך: ...

...

$y=\hat{R}ev\,x$
means
$y(t)=x(-t)\ \forall t$

A | D

$y=\hat{R}ev\,x$
means
$y_n=x_{-n}\ \forall n$

	D	A
אופרטור חיבור:	$z=x+y$ means $z_n=x_n+y_n \ \forall n$	$z=x+y$ means $z(t)=x(t)+y(t) \ \forall t$
אופרטור כפל: הכפלה value by value עד סיגנל חדש.	$z=xy$ means $z_n=x_n y_n \ \forall n$	$z=xy$ means $z(t)=x(t)y(t) \ \forall t$
אופרטור dot product: התוצר הוא מס' ממשי/סקלרי. כל הסיגנל. הנורמה של סיגנל זה ה-dp של סיגנל עם עצמו, בשורש ה-dp	$r=x\cdot y$ means $r=\sum_{n} x_n y_n$	$r=x\cdot y$ means $r=\int x(t)y(t)dt$

אם שני סיגנלים שונים מאפסים את המכפלה ביניהם. סיגנלים שבהם ה-dp שלהם אפס הם **אורתוגונליים**, ...

אופרטור הקדמה בזמן לסיגנלים דיסקרטיים:

$y=\hat{z}x$ means $y_n=x_{n+1} \ \forall n$

$y=\hat{z}\hat{z}x=\hat{z}^2x$ means $y_n=x_{n+2} \ \forall n$

אופרטור ההשהיה בזמן לסיגנלים דיסקרטיים:

$y=\hat{z}^{-1}x$ means $y_n=x_{n-1} \ \forall n$

$\hat{z}\hat{z}^{-1}x=\hat{z}^{-1}\hat{z}x=x$

אופרטור ההפרש האחורי: ... הגזירה לסיגנלים ... והם ... :

נגזרת דיסקרטית $\rightarrow \Delta\equiv(1-\hat{z}^{-1}) \rightarrow \Delta x_n=x_n-x_{n-1}$

$\Delta(xy)=x\Delta(y)+\Delta x\,\hat{z}^{-1}y$

$\Delta\alpha^n=\alpha^n(1-\alpha^{-1})$

סיגנל עצמי:

$x=e^{\lambda n},\ y_n=\hat{z}^{-1}e^{\lambda n}=e^{\lambda(n-1)}=e^{\lambda n}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}x_n$

סיגנל שכאשר ... הפעלת אופרטור ... זהו סיגנל עצמי של אופרטור ... eigenvalue ... $e^{-\lambda}$ ... של אופרטור ההשהיה בזמן: $\hat{z}^{-1}$.

- אקספוננט הוא ...
- סינוס הוא ...

... $s_{n-1}=\sin(\omega(n-1))=\sin(\omega n)\cos(\omega)-\cos(\omega n)\sin(\omega)$

...

אבל: ...

המרחב הוקטורי של הסיגנלים ...

תכונות מרחב וקטורי:

(1) קיים וקטור 0: $x+0=x$ לכל וקטור x. ↔ הסיגנל הקבוע $0=x_n$ לכל n.

(2) קיים אופרטור חיבור כך שכאשר מחברים 2 וקטורים מקבלים וקטור: $z=x+y$. ...

(3) לכל וקטור x קיים וקטור הופכי $-x$: $x+(-x)=0$.

(4) norm - לכל וקטור יש אורך ממשי אי-שלילי ...

- כפל: לכל וקטור x ומספר a קיים וקטור ax.
- ... : לכל 2 וקטורים x,y קיים מספר ... a: $a=x\cdot y$ ↔ dot product
- מרחק: לכל 2 וקטורים x,y קיים מספר ממשי אי-שלילי d: $d=\delta(x,y)$, $d=0$ אם"ם $x=y$.

↔ ...

- ...

$s=\sum_k c_k v_k$

$s=\int c(k)v(k)dk$

בסיס: אוסף וקטורים המקיימים:
(1) כל וקטור ניתן לייצוג ע"י סכום ממושקל של וקטורי הבסיס.
(2) ניתן לייצג בצורה יחידה: הבסיס המינימלי של וקטורי בסיס.
מימד: מספר הוקטורים בבסיס.

- המימד הרציף: אינסופי, המימד הדיגיטלי הוא מימד N.
- לכל מרחב וקטורי: קיים יותר מבסיס אחד ומספר הוקטורים בכל בסיס שווה.
- במרחב הוקטורי של הסיגנלים קיים יותר מבסיס אחד:
(1) בסיס שמאפשר את ייצוג הסיגנל בזמן. - זמן
(2) בסיס שמאפשר את ייצוג הסיגנל בתחום התדר. - סינוסים.

- הבסיס בתחום הזמן

זמן: shifting unity impulse: $S_n^{[m]} = \delta_{n,m}$

טענה: אוסף הסיגנלים זמן (הזזה אורתו') מהווים בסיס למרחב הסיגנלים הדיגיטלי.

הוכחה: נניח סיגנל שרירותי ... בין הערכים δ-ו ... כל סיגנל ... $S_{n,m}$ ... הנה הסיגנל המקורי ...
ניתן לייצג כל סיגנל ... זמן: $S_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_m \delta_{n,m}$
מכאן שהבסיס פורש את המרחב.
... 2 ... (...) הם אורתוגונליים
... יחיד.
... הבסיס של המרחב ...
... יחידה ...

- ניתן להראות ע"י ... $\delta(t-\tau)$

- הבסיס בתחום התדר

... של ... סינוסים ... של ...
... של סינוסים ... הסיגנלים ... הם ...
HRS - Harmonically related sines.
... הסינוסים ... 2π, 3π, 4, 1, ...
... הבסיס.

אב פורייה: ... קוסינוס וסינוס ...

טענה: כל פונ' ... ניתן לייצג ע"י סכום של סינוסים וקוסינוסים.

הוכחה: כל פונ' ניתנת לפירוק לפונ' זוגית ... כל פונ' זוגית ניתנת לייצוג ע"י סכום של קוסינוסים. כל פונ' אי-זוגית ... ניתנת לייצוג ע"י סכום של סינוסים.
... $f(t) = \sum_{n=0} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1} b_n \sin(n\omega t)$ = ...
... בסיס ... הסינוסים והקוסינוסים.

ייצוגי (נוסף) הבסיס

... 2 ... בסיס ... : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n)$
... 2 ... C_n ... ϕ_n.
... : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega n t}$
... :
... :

$F_0 = b_0$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{i\omega n t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{i\omega n t}$

$= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-i\omega n t} + F_{n} e^{-i\omega n t}$

... קוסינוס וסינוס:

- ...

3.5 רכיבי התדר

מחזור T: הזמן שלוקח לסיגנל לחזור על cycle אחד (הזמן שלוקח לגל לחזור לאותו מצב)(נמדד בשניות/מחזור)

סינוסים מחזוריים פשוטים – תדר f: מספר המחזורים בשניה. (Hz) $f=\frac{1}{T}$

הכללה המחזורית – • סיגנל מחזורי g בזמן T: $g(t+T)=g(t)$ לכל t. לכן אם יש תדר f מחזורי עם מחזור g, אז יש תדר כפול 2f מחזורי עם מחזור g, וכו' (הכפולה 3f וכו'). – תדרים הקשורים כך נקראים הרמוניים.
HRS - Harmonically Related Sinusoids

• אם נחבר ונכפיל כמויות של סי' התדר (או המחזור), המשרעת והפאזה נקבל סיגנלים מורכבים יותר כחלק מסכום. ... רכיבי תדרים. ... הסכום את הסיגנל ... נקרא ה-spectrum של הסיגנל.
בשפה ה... : frequency components: רכיבי התדר.

• הסיגנל הבסיסי מחזורי ... , והתדר הנמוך ביותר הוא התדר של המחזור.
• אם יש מחזור T אז כל סיגנל עם מחזור $\frac{T}{k}=T$ ... harmonic של התדר הבסיסי.
• חיבור של מספר סיגנלים עם מחזור T, הוא מחזורי עם אותו מחזור.
• ... כל סיגנל מחזורי ... ניתן לחבר סיגנלים ... עם מחזור $\frac{T}{k}=T$.
ניתן להראות ... ההרמוניות ... והפאזות ...
... HRS ...
סיגנל הבסיס.

3.4 ייצוג ע"י סדרות Fourier

טענה: כל סיגנל (כמעט) ... ניתן לייצוג ע"י טור פורייה (FS).
... כי הסינוסים ... הבסיס ... של סיגנלים מחזוריים עם מחזור T.
הסדרה: ...
Fourier Series: ההצגה של סיגנל מחזורי ... בעזרת הבסיס ... HRS.

3.6 FS בצורה ובמרחב ...

הסיגנל ... sin/cos ... :
$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t)+b_0+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(\frac{2\pi k}{T}t)$
... sin ו-cos ... (90° או $\frac{\pi}{2}$ ...) ... Quadrature form
... :

$a_k\sin(\omega t)+b_k\cos(\omega t)=d_k\sin(\omega t+\varphi_k)$ as long as $d_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, $\varphi_k=\tan^{-1}(b_k/a_k)$

ניתן לכתוב את x(t):
$x(t)=d_0+\sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t+\varphi_k)$

... power spectrum $|d_k|^2$ ...
... d_k ו-φ_k ...
נזכור כי:
• $\cos(\omega t)=\frac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$ • $\sin(\omega t)=\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$
... $e^{i\omega t}$ ו-$e^{-i\omega t}$ ... $e^{i\omega t}$ ...

• ... :
• $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$
• ניתן להראות כי c_k ... :
• $c_k(t)=\frac{1}{T}\int x(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}dt$
• ... :
• $\int e^{i\frac{2\pi n}{T}t}e^{-i\frac{2\pi m}{T}t}dt=\delta_{mn}T$

... dot product ... סיגנלים מרוכבים:
• $s_1\cdot s_2=\int s_1(t)s_2^*(t)dt$ and that • $u_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$

...
• ...

4 ניתוח תדר

4.1 טורי Fourier וטרנספורם Fourier

טור פורייה: פונקציה של סיגנל [illegible] מחזורי כסכום של sin ו-cos, [illegible]
טור פורייה [illegible] תדר, [illegible]
[illegible] כסכום של סיגנלים [illegible]

- [illegible] בין טרנספורם פורייה [illegible]:

(1) טרנספורם פורייה [illegible]
(2) [illegible] כמו כן יש [illegible]
sin ו-cos [illegible] אורתוגונליים:

- $\int \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\,dt = 0 \quad \text{if } \omega_1 \neq \omega_2$

[illegible] sin ו-cos

[illegible] אורתוגונליים [illegible]

- S_n - [illegible]
S_n - [illegible] של סיגנל [illegible] sin ו-cos

$f(t) = S_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{+inx}$

- [illegible] spectrum [illegible] מחזוריים [illegible]
[illegible] continuum [illegible] HR.
[illegible]

- טרנספורם: [illegible] טרנספורם.
טרנספורם פורייה: פונקציה של סיגנל [illegible]

$s(t) \leftrightarrow S(\omega)$

FT [illegible] FS [illegible]
[illegible] HR [illegible]
[illegible]
[illegible] HRS [illegible]
[illegible]
[illegible] quadrature [illegible] $\cos(\omega t)$ [illegible] $\sin(\omega t + \varphi)$ [illegible]
[illegible]

- [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

$FT = S(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad s(t) = \int S(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$

[illegible] FT [illegible]
[illegible] FT [illegible] domain [illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

IFT - inverse FT:
- $x(t) = FT^{-1}(S(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$

Fourier Integral Theorem:
- $FT^{-1}FT = 1 \qquad s(t) = FT^{-1}(S(\omega)) = FT^{-1}FT(s(t))$

- [illegible] FT [illegible]
[illegible] (FS). [illegible] Fourier Spectral density,
[illegible] $S(\omega)d\omega$ [illegible] FS [illegible] FT [illegible]
[illegible]

[illegible]

4.5 Power Spectrum: [illegible] $|S(\omega)|^2$

[illegible] $|S(\omega)|^2$

התמרת הילברט - האמפליטודה והמופע של אות 4.12

תדר: עבור סיגנל שאינו סינוס תדר הוא למעשה מושג של FT כלומר הרכב [illegible] תדרים.
הגדרה נוספת תדר: [illegible]

[illegible]:

- $x(t) = A(t)\cos(\omega_c t + \phi(t))$, $\Phi(t) = \omega_c t + \phi(t)$

[illegible] instantaneous [illegible]

$A(t)$ - אמפליטודה [illegible], $\Phi(t)$ - [illegible], ω - carrier freq, $\phi(t)$ - מופע [illegible]

התדר [illegible]:

- $2\pi f(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega + \frac{d\phi(t)}{dt}$

[illegible]

עניין: [illegible]
AM (amplitude modulation), PM [illegible]

התמרת הילברט: [illegible] $x(t)$ [illegible]
[illegible] $y(t) = \hat{H}x(t)$ [illegible]
[illegible] 90° [illegible] $x(t) = A\cos(\omega t)$

- $y(t) = \hat{H}x(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A\sin(\omega t)$

$y(t) = A\cos(\omega(t - \frac{\pi}{2\omega})) = x(t - \frac{\pi}{2\omega})$

[illegible] HT [illegible]
[illegible] 90° [illegible]
[illegible] HT [illegible] FT [illegible]
[illegible] FT.

[illegible] A ו-ϕ: [illegible]

- $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$

[illegible]: four-quadrant arctangent $\left(\frac{y(t)}{x(t)} = tg\phi\right)$

- $\phi(t) = \tan^{-1}_4\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$

התדר הרגעי:

- $\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \dot{\Phi}(t)$

[illegible] demodulation [illegible]
[illegible]
[illegible] HT [illegible]

Pre-emphasis: ההבדל בין PM ו-FM [illegible] PM [illegible] FM.
[illegible]
[illegible] FM [illegible] ω_c [illegible] $\phi(t)$ [illegible] FM [illegible]
[illegible] $\cos(\omega(t))$ [illegible]
[illegible] PM [illegible] $\phi(t)$ [illegible]
[illegible] $A\cos(\omega t)$ [illegible]
[illegible]